

Лекция 18

ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В предыдущих лекциях при рассмотрении МКЭ для уравнения Пуассона с теми или иными граничными условиями мы предполагали, что область полигональна, и, следовательно, ее можно разбить, например, на треугольники с прямолинейными сторонами. Но в вычислительной практике встречается достаточно много задач для областей, границы которых либо криволинейны, либо содержат криволинейные участки. Как быть здесь? Можно ли приспособить МКЭ для решения и таких задач? Ответ, конечно, утвердительный, однако в большинстве случаев трактовать МКЭ следует более широко.

Пусть Ω — область, граница $\partial\Omega$ которой криволинейна. Разобьем эту

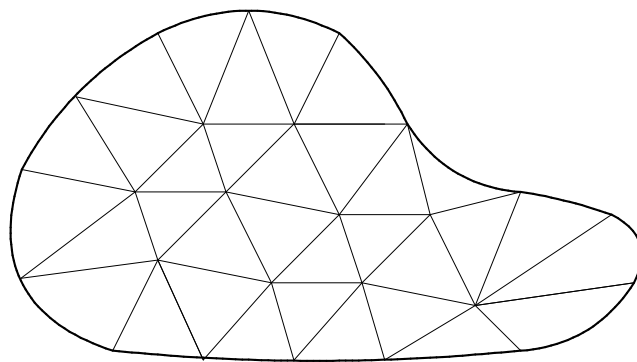


Рис. 1

область на треугольники, часть из которых (расположенных в окрестности границы) может иметь одну криволинейную сторону (см. рис. 1).

Зададим в вершинах треугольников какие-нибудь значения и построим по ним кусочно-линейную, непрерывную, линейную на каждом треугольнике, функцию. Совокупность всех таких функций назовем S^h (размерность этой совокупности — пространства — равна числу различных вершин треугольников).

Предположим, что нам предъявлена для решения следующая задача:

$$-\Delta u + u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Присутствие младшего члена с нужным знаком в этом уравнении гарантирует существование единственного решения рассматриваемой задачи *Неймана*. Вариационная постановка задачи (1), (2) такова: найти

$$u \in H^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

где

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) dx dy, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v dx dy.$$

Так как $S^h \subset H^1(\Omega)$, то приближенное решение можно определить обычным образом: найти

$$u^h \in S^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in S^h, \quad (3)$$

и, вроде бы, никаких проблем: в силу замечания 16.2 для решения задачи (3) справедлива оценка из теоремы 16.2.

Проблемы, однако, есть.

- Поскольку прилегающие к $\partial\Omega$ треугольники имеют криволинейную сторону, то вычисление интегралов по ним становится практически неосуществимым.

- Если бы граничное условие (2) было неоднородным или это было *граничное условие третьего рода*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \kappa u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

то линейная форма $l(v)$ или билинейная форма $a(u, v)$ дополнительно содержали бы интегралы по $\partial\Omega$, и при реализации соответствующей задачи (3) их тоже нужно было бы как-то вычислять.

• Наконец, если бы вместо естественных граничных условий (2) или (4) было поставлено главное граничное условие, например,

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

то конечноэлементную задачу мы смогли бы поставить, лишь образовав новое конечномерное пространство $\overset{\circ}{S}^h$ из функций, которые тождественно равны нулю на всех треугольниках (с криволинейными и прямолинейными сторонами), у которых хотя бы одна вершина лежит на $\partial\Omega$. Только в этом случае $\overset{\circ}{S}^h$ будет принадлежать $H_0^1(\Omega)$, и главное граничное условие для приближенного решения будет выполнено. Ясно, что это плохо с точки зрения точности получаемого приближенного решения, в чем легко убедиться на одномерной модели.

1. Простейшая аппроксимация криволинейной границы

Преодоление тех трудностей, которые мы обнаружили при использовании криволинейных конечных элементов, может быть осуществлено путем отказа от треугольников с криволинейными сторонами *произвольного вида*.

Пусть Ω — выпуклая область с гладкой границей $\partial\Omega$. Построим ее триангуляцию π^h . Для этого разобьем Ω на треугольники, часть из которых будет иметь одну криволинейную сторону. В криволинейных треугольниках соединим вершины, расположенные на $\partial\Omega$, отрезками прямых, в результате чего из криволинейных треугольников получим прямолинейные. Обозначим объединение всех прямолинейных треугольников из $\bar{\Omega}$ через $\Omega_h = \bigcup_{e^{(i)} \in \pi^h} e^{(i)}$. Теперь уже, вообще говоря, $\bar{\Omega} \neq \Omega_h$, однако в силу выпуклости области $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$. Это будет *аппроксимация области Ω* .

Рассмотрим задачу (1), (5). Ее вариационная формулировка такова: найти

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (6)$$

Пусть $\overset{\circ}{S}^h(\Omega_h)$ — конечноэлементное пространство кусочно-линейных непрерывных функций, заданных на Ω_h и обращающихся в нуль на $\partial\Omega_h$. Продолжим все функции из $\overset{\circ}{S}^h(\Omega_h)$ нулем с Ω_h на Ω . Обозначим новое пространство через $\overset{\circ}{S}^h(\Omega)$. Очевидно, что функции из $\overset{\circ}{S}^h(\Omega)$ кусочно-линейны, непрерывны и $\overset{\circ}{S}^h(\Omega) \subset H_0^1$. Тем самым, приближенным решением задачи (6) можно объявить функцию

$$u^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega) : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega).$$

Для реализации этой задачи потребуется вычисление интегралов (точное или приближенное) только по треугольникам с прямолинейными сторонами, а это мы делать умеем.

В силу теоремы 11.1

$$a(u - u^h, u - u^h) = \inf_{v^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega)} a(u - v^h, u - v^h).$$

Но

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}(u - v^h) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}(u - v^h) \right]^2 + (u - v^h)^2 \right\} dx dy = \\ & = \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right\} dx dy = \text{const}, \end{aligned}$$

ибо на $\Omega \setminus \Omega_h$ функции $v^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega)$ тождественно нулевые.

Пусть

$$a_h(u^h, v^h) = \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial v^h}{\partial x} + \frac{\partial u^h}{\partial y} \frac{\partial v^h}{\partial y} + u^h v^h \right) dx dy.$$

Тогда

$$a_h(u - u^h, u - u^h) = \inf_{v^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega_h)} a_h(u - v^h, u - v^h). \quad (7)$$

Полагая теперь $v^h = i_h u$ и принимая во внимание, что

$$c_0 \|v\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq a_h(v, v) \leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega_h)}^2,$$

получим оценку

$$c_0 \|u - u^h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq c_1 \|u - i_h u\|_{H^1(\Omega_h)}^2.$$

Если $u(x) \in H^2(\Omega)$, а триангуляция Ω_h регулярна, и $\max_{\Omega_h} e^{(i)} \leq h$, то в силу теоремы 16.1

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h.$$

Мы доказали, что, если приближенное решение принадлежит S_1^h , то для однородной задачи Дирихле в выпуклой области замена криволинейных треугольников прямолинейными не приводит к уменьшению порядка точности в H^1 .

На самом деле выпуклость Ω здесь не при чем, хотя мы и пользовались этим в своих рассуждениях. Тот же результат верен и для невыпуклых областей с гладкой границей. (Не путать с невыпуклыми полигональными областями.) Действительно, пусть Ω — невыпуклая область с гладкой границей. Как и в выпуклом случае построим Ω_h . Теперь уже, вообще говоря, $\Omega_h \not\subset \bar{\Omega}$, и мы не можем построить приближенное решение, поскольку $f(x, y)$ на Ω_h не везде определена. Что касается граничных узлов Ω_h , то, несмотря на то, что не вся $\partial\Omega_h$ принадлежит $\bar{\Omega}$, указанные узлы расположены на $\partial\Omega$.

Пусть область $\tilde{\Omega}$ такова, что $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ и $\Omega_h \subset \tilde{\Omega}$ для всех допустимых триангуляций π^h . "Гладко" продолжим решение $u(x, y)$ задачи (16.13) с Ω на $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{u}(x, y) \in H^2(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{u}(x, y) \Big|_{\Omega} = u.$$

Продолжим f из (16.13) с Ω на $\tilde{\Omega}$ по формуле

$$\tilde{f} = -\Delta \tilde{u}. \quad (8)$$

Теперь мы можем определить приближенное решение следующим образом:

$$u^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega_h) : a_h(u^h, v^h) = l_h(v^h) \quad \forall v^h \in \overset{\circ}{S}^h(\Omega_h), \quad (9)$$

где

$$a_h(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega_h} (\nabla \tilde{u})^T (\nabla \tilde{v}) dx dy, \quad l_h(\tilde{v}) = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \tilde{v} dx dy. \quad (10)$$

Заметим, что u^h из (9) не есть галеркинское решение задачи (6), поскольку $a_h \neq a$.

Оценим разность между u^h и \tilde{u} . В силу неравенства треугольника

$$\|\tilde{u} - u^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq \|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)} + \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}. \quad (11)$$

Если $v^h \in \overset{\circ}{S}(\Omega_h)$, то в силу (10) и неравенства Фридрихса из упражнения 11.5

$$\begin{aligned} c \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 &\leq a_h(u^h - v^h, u^h - v^h) = \\ &= a_h(u^h, u^h - v^h) - a_h(v^h, u^h - v^h) = \\ &= l_h(u^h - v^h) - a_h(\tilde{u}, u^h - v^h) + a_h(\tilde{u} - v^h, u^h - v^h). \end{aligned}$$

Поскольку $u^h - v^h \in \overset{\circ}{S}(\Omega_h)$, то

$$-a_h(\tilde{u}, u^h - v^h) = \int_{\Omega_h} \Delta \tilde{u} (u^h - v^h) dx dy,$$

а принимая во внимание (8), находим, что

$$l_h(u^h - v^h) - a_h(\tilde{u}, u^h - v^h) = \int_{\Omega_h} (u^h - v^h)(\tilde{f} + \Delta \tilde{u}) dx dy = 0.$$

Тем самым,

$$c \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq a_h(\tilde{u} - v^h, u^h - v^h) \leq \|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)} \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}.$$

Сокращая на $\|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}$ и комбинируя полученное неравенство с (11), получим оценку

$$\|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq (1 + c^{-1}) \|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}.$$

Принимая теперь во внимание, что граничные узлы Ω_h расположены на $\partial\Omega$, а по построению $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$, можно положить $v^h = i_h \tilde{u}$, что приведет к уже рассмотренной задаче об оценке интерполяции и искомой оценке

$$\|\tilde{u} - u^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h |\tilde{u}|_{H^2(\Omega_h)}^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, построенное приближенное решение в невыпуклой области зависит от способа продолжения правой части уравнения и его коэффициентов, если они не постоянные, на $\tilde{\Omega}$. Однако, для вычисления (приближенного) матрицы жесткости и вектора нагрузки обычно используются квадратурные формулы, и, если узлами квадратурной формулы являются лишь узлы конечных элементов, то этой зависимости не будет, и реально ничего продолжать не нужно.

2. Квадратичные треугольные элементы в криволинейной области

Из упражнения 16.2 следует, что в полигональной области решение задачи (16.16) с $S_2^h = \{v^h \in C(\bar{\Omega}) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)})\}$ вместо S_1^h приближает в H^1 решение задачи (16.13) $u(x, y) \in H^3(\Omega)$ с погрешностью $O(h^2)$. Выясним, переносится ли этот результат на области с гладкой границей, как это было в случае кусочно-линейных приближенных решений.

Для простоты мы будем предполагать, что область Ω выпуклая, а $\Omega_h = \bigcup e^{(i)} \subset \bar{\Omega}$ построена так же, как и в п. 1 (см. рис. 2). Теперь,

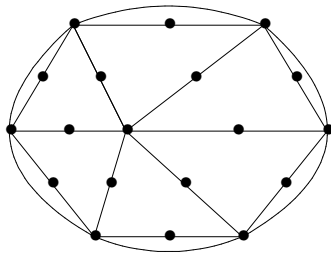


Рис. 2

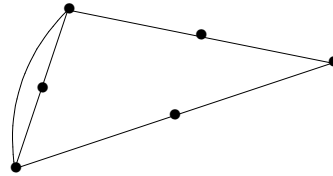


Рис. 3

правда, узлами $e^{(i)}$ являются не только его вершины, но и середины сторон. Пусть конечноэлементное пространство задается соотношением

$$S_2^h(\Omega_h) = \{v^h \in C(\Omega_h) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)})\},$$

а приближенное решение задачи (16.13) ищется в подпространстве

$$\overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h) = \{v^h \in S_2^h(\Omega_h) \mid v^h|_{\partial\Omega_h} = 0\}.$$

Именно,

$$u^h \in \overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h) : a_h(u^h, v^h) = l_h(v^h) \quad \forall v^h \in \overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h),$$

где a_h и l_h заданы соотношениями (10). Как и в п. 1 (см. (7)), находим, что для любой $v^h \in \overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h)$

$$a_h(u - u^h, u - u^h) \leq a_h(u - v^h, u - v^h). \quad (12)$$

Однако теперь брать $i_{h,2}u$ в качестве v^h нельзя, так как $i_{h,2}u \in \overline{\overset{\circ}{S}}_2^h(\Omega_h)$, хотя $i_{h,2}u \in \overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h)$. Чтобы описать подходящий выбор v^h , разобьем все узлы конечных элементов из триангуляции π^h на два непересекающихся множества. К первому множеству отнесем узлы $(x_i, y_i) = Q_i \in \overset{\circ}{\Omega}_h \cup \partial\Omega$, где $\overset{\circ}{\Omega}_h$ — внутренняя часть Ω_h (напомним, что $\Omega_h = \overline{\overset{\circ}{\Omega}}_h$), а ко второму — $(x_i, y_i) = P_i \in \partial\Omega_h \setminus \partial\Omega$. Теперь введем в рассмотрение функцию $\tilde{u}(x, y)$, которая в узлах Q_i совпадает с $u(x, y)$, а в узлах P_i равна нулю. Положим затем в (12)

$$v^h(x, y) = i_{h,2}\tilde{u}(x, y) \in \overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h).$$

Итак, отсюда, из (10) и (12) обычным образом находим, что

$$\begin{aligned} |u - u^h|_{H^1(\Omega_h)}^2 &\leq |u - i_{h,2}\tilde{u}|_{H^1(\Omega_h)}^2 = |u - i_{h,2}u + i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq \\ &\leq 2|u - i_{h,2}u|_{H^1(\Omega_h)}^2 + 2|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2. \end{aligned}$$

В силу обобщения теоремы 16.1 на случай $i_{h,2}v \in \overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h)$ (см. указание к упражнению 16.2),

$$|u - i_{h,2}u|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq ch^4|u|_{H^3(\Omega_h)}^2,$$

а

$$|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2 = \sum_i u^2(P_i) \int_{e^{(i)}} |\nabla \varphi_i|^2 dx dy,$$

где суммирование осуществляется по описанному выше второму множеству узлов. В этом множестве содержится $O(h^{-1})$ узлов (именно столько

элементов примыкает к $\partial\Omega$). По определению базисных функций φ_i справедливо равенство $|\nabla\varphi_i| = O(h^{-1})$, а площадь $e^{(i)}$ есть $O(h^2)$. Поэтому

$$|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2 = O(h^{-1}) \max_i u^2(P_i).$$

Далее, поскольку расстояние от узла P_i до гладкой границы $\partial\Omega$ есть $O(h^2)$, а $u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$, то $u(P_i) = O(h^2|\nabla u|)$ и, следовательно,

$$|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^{3/2}),$$

а потому и

$$|u - u^h|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^{3/2}).$$

Это на полпорядка хуже, чем аналогичная оценка для полигональной области (см. упражнение 16.2), и, следовательно, так использовать квадратичные элементы нецелесообразно.

3. Изопараметрические конечные элементы

Вновь обратимся к области с гладкой (криволинейной) границей. В отличие от полигональных областей, где гладкость искомого решения существенно ограничена наличием углов на границе, в областях с гладкой границей решение может быть сколь угодно гладким. Здесь гладкость решения полностью определяется гладкостью входных данных: границы, граничных условий, коэффициентов и правой части уравнения. Поэтому именно для задач в гладких областях было бы целесообразным использовать многоточечные конечные элементы, которые обеспечивают высокую точность как раз на гладких решениях. Вопрос только в том: как строить такие схемы, если граница криволинейная. В п. 2 мы убедились, что использование шеститочечных прямолинейных треугольников проблему не решает.

Выход состоит в применении так называемой *изопараметрической техники*, которая наряду с прямолинейными треугольниками допускает использование треугольников со *специальными криволинейными сторонами*. (Мы уже знаем, что использование треугольников с достаточно общими криволинейными сторонами приводит к практически непреодолимым вычислительным трудностям при построении матрицы жесткости и

вектора нагрузки.) Очевидно, что можно ограничиться треугольниками с одной криволинейной стороной, которая прилегает к границе $\partial\Omega$.

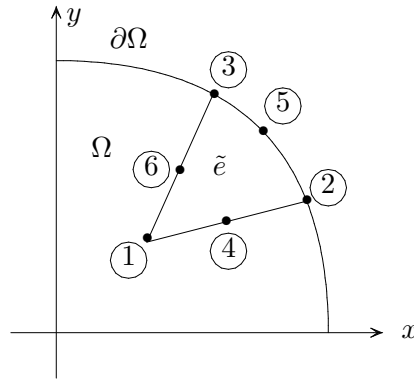


Рис. 4

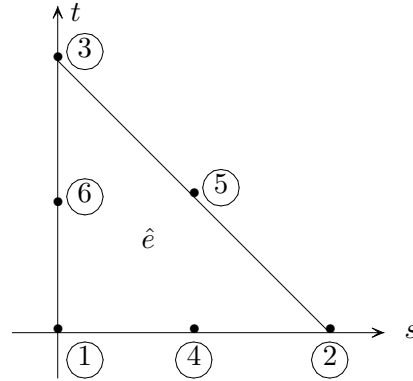


Рис. 5

На рис. 4 изображена часть области Ω и шеститочечный криволинейный треугольник \tilde{e} , узлы которого расположены в вершинах, в серединах прямолинейных сторон и где-то на криволинейной стороне. В данном контексте правильнее было бы говорить не о криволинейном треугольнике, а только о принадлежащих его границе шести узлах. Введем в рассмотрение реперный прямоугольный треугольник \hat{e} с узлами в вершинах и серединах сторон (см. рис. 5) и установим его связь с \tilde{e} . У нас нет никаких шансов отобразить реперный треугольник \hat{e} на криволинейный \tilde{e} при помощи простых функций. От этой затеи откажемся сразу. Поставим более скромную задачу: отобразить узлы \hat{e} в узлы \tilde{e} . Это можно сделать при помощи квадратичного преобразования

$$x = P_2(s, t), \quad y = Q_2(s, t).$$

Очевидно, что

$$x = \sum_{j=1}^6 x_j \varphi_j, \quad y = \sum_{j=1}^6 y_j \varphi_j, \quad (13)$$

где (x_j, y_j) — координаты j -го узла на плоскости Oxy , а φ_j — функции формы квадратичного треугольного элемента (10.1), (10.2)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), & \varphi_2 &= \zeta_2(2\zeta_2 - 1), & \varphi_3 &= \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \\ \varphi_4 &= 4\zeta_1\zeta_2, & \varphi_5 &= 4\zeta_2\zeta_3, & \varphi_6 &= 4\zeta_1\zeta_3. \end{aligned}$$

Изучим преобразование (13). Барицентрические координаты на базисном треугольнике имеют простой вид:

$$\zeta_2 = s, \quad \zeta_3 = t, \quad \zeta_1 = 1 - s - t.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 - s - t)(1 - 2s - 2t), & \varphi_2 &= s(2s - 1), & \varphi_3 &= t(2t - 1), \\ \varphi_4 &= 4(1 - s - t)s, & \varphi_5 &= 4st, & \varphi_6 &= 4(1 - s - t)t. \end{aligned}$$

Отсюда и из (13) находим, что, например,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (-3x_1 - x_2 + 4x_4)s + (-3x_1 - x_3 + 4x_6)t + \\ &+ 2(x_1 + x_2 - 2x_4)s^2 + 2(x_1 + x_3 - 2x_6)t^2 + 4(x_1 - x_4 + x_5 - x_6)st. \end{aligned}$$

Поскольку четвертый и шестой узлы расположены в серединах сторон, то

$$x_4 = (x_1 + x_2)/2, \quad x_6 = (x_1 + x_3)/2,$$

и квадратичное преобразование превращается в билинейное

$$\begin{aligned} x &= A_1 + B_1s + C_1t + D_1st, \\ y &= A_2 + B_2s + C_2t + D_2st, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= x_1, & B_1 &= x_2 - x_1, & C_1 &= x_3 - x_1, & D_1 &= -2(x_2 + x_3 - 2x_5), \\ A_2 &= y_1, & B_2 &= y_2 - y_1, & C_2 &= y_3 - y_1, & D_2 &= -2(y_2 + y_3 - 2y_5). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если бы рассматриваемый криволинейный треугольник \tilde{e} был прямолинейным, и пятый узел располагался в середине стороны, то $x_5 = (x_2 + x_3)/2$, $y_5 = (y_2 + y_3)/2$, и коэффициенты D_1 и D_2 преобразования (14) были бы равны нулю, т.е. преобразование (14) фактически было бы не квадратичным, а линейным.

Изучим теперь вопрос о том, куда преобразование (14), переводящее узлы в узлы, переводит реперный треугольник \hat{e} . Пусть $s = 0$. Тогда $x = A_1 + C_1t$, $y = A_2 + C_2t$. Отсюда следует, что сторона реперного треугольника, расположенная на прямой $s = 0$, переходит в прямолинейный

отрезок, расположенный на прямой $(x - A_1)/C_1 = (y - A_2)/C_2$. Аналогично, при $t = 0$ $(x - A_1)/B_1 = (y - A_2)/B_2$, т.е. если срединные четвертый и шестой узлы криволинейного треугольника расположены в серединах прямолинейных сторон, то преобразованием (14) прямолинейные стороны реперного треугольника \hat{e} переводятся в прямолинейные стороны \tilde{e} .

Прежде чем выяснять, куда переходит гипотенуза реперного треугольника \hat{e} , исследуем вопрос об обратимости преобразования (14). Пусть

$$(s, t) \longrightarrow (x', y') \longrightarrow (x, y),$$

т.е. преобразование (14) осуществляется в два этапа, причем последнее преобразование $(x', y') \longrightarrow (x, y)$ линейное и такое, при котором в вершины \tilde{e} переходят вершины равнобедренного прямоугольного треугольника плоскости $Ox'y'$ (см. рис. 6). Именно

$$x'_1 = 0, \quad y'_1 = 0; \quad x'_2 = 1, \quad y'_2 = 0; \quad x'_3 = 0, \quad y'_3 = 1.$$

Тогда $x'_4 = 1/2$, $y'_4 = 0$ и $x'_6 = 0$, $y'_6 = 1/2$, а x'_5 и y'_5 — какие-то.

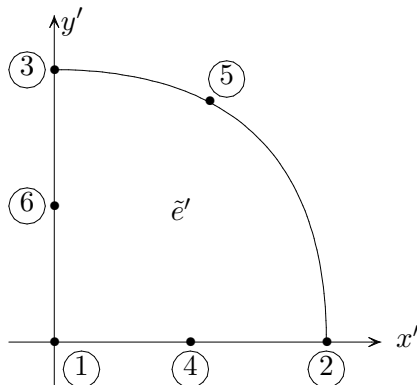


Рис. 6

Якобиан этого преобразования постоянен и, следовательно, не обращается в нуль. С этой точки зрения нужно изучить только преобразование $(s, t) \longrightarrow (x', y')$. Для него

$$\begin{aligned} A'_1 &= 0, & B'_1 &= 1, & C'_1 &= 0, & D'_1 &= 4(x'_5 - 1/2) =: a, \\ A'_2 &= 0, & B'_2 &= 0, & C'_2 &= 1, & D'_2 &= 4(y'_5 - 1/2) =: b, \end{aligned} \quad (15)$$

т.е.

$$x' = s + ast, \quad y' = t + bst. \quad (16)$$

Якобиан этого преобразования $\det \hat{J}(s, t) = 1 + at + bs$ линеен и не обращается на \hat{e} в нуль, если в вершинах \hat{e} имеет значения одного знака. Поскольку

$$\det \hat{J}(0, 0) = 1, \quad \det \hat{J}(1, 0) = 1 + b, \quad \det \hat{J}(0, 1) = 1 + a,$$

то преобразование (16) будет невырожденным на \hat{e} , если и $1 + a > 0$, и $1 + b > 0$. Отсюда в силу (15) вытекают следующие условия на координаты узла (x'_5, y'_5) :

$$x'_5 > 1/4, \quad y'_5 > 1/4. \quad (17)$$

Эти условия ограничительные. Например, для криволинейного треугольника, изображенного на рис. 7, они не выполняются, в то время

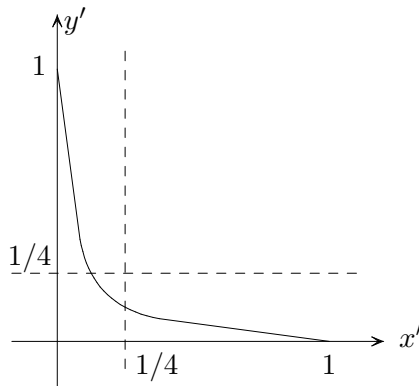


Рис. 7

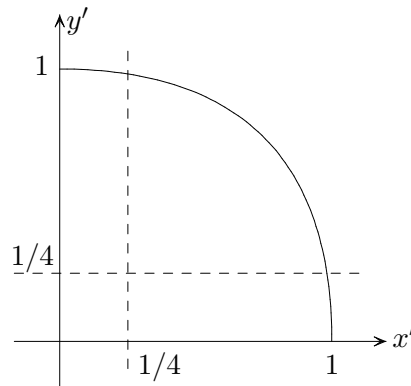


Рис. 8

как для криволинейного треугольника, изображенного на рис. 8, имеется большая свобода для выбора точки на криволинейной границе. Следует, однако, заметить, что треугольник на рис. 7 вряд ли обладает хорошими аппроксимационными свойствами, и его целесообразно разбить на два треугольника, после чего проблема будет снята.

Теперь посмотрим, куда на плоскости $Ox'y'$ переходит гипотенуза реперного треугольника. Отметим, что при реальных вычислениях нам это нигде не понадобится, и здесь мы удовлетворяем лишь собственное любопытство. Принимая во внимание (16) и рис. 5, находим, что искомая

кривая задается уравнениями

$$x' = s + ast, \quad y' = t + bst, \quad s + t = 1. \quad (18)$$

Заметим, что если $a + b = 0$, то $x' + y' = 1$, т.е. в этом случае гипотенуза переходит в отрезок прямой, как и при $a = b = 0$, но преобразование (16) остается билинейным. Пусть $a + b \neq 0$. Из первых двух уравнений (18) вытекает, что

$$bs - at = bx' - ay'.$$

Отсюда и из последнего уравнения (18) находим

$$s = \frac{bx' - ay' + a}{a + b}, \quad t = \frac{-bx' + ay' + b}{a + b},$$

а, подставляя эти значения s и t , например, в первое уравнение (18), получим уравнение кривой второго порядка

$$(bx' - ay')^2 + (b(a - b) + a + b)x' + (a(b - a) + a + b)y' - (a + b + ab) = 0. \quad (19)$$

Поскольку матрица

$$\begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

квадратичной формы $(bx' - ay')^2$ вырождена, то найденная кривая является параболой, ось которой коллинеарна вектору $[a \ b]^T$, являющемуся собственным вектором матрицы (20), отвечающим нулевому собственному значению. На рис. 9 сплошной линией изображен треугольник e' , криволинейная сторона которого описывается параболой (19), а штриховой

линией — образ на $Ox'y'$ исходного треугольника \tilde{e} .

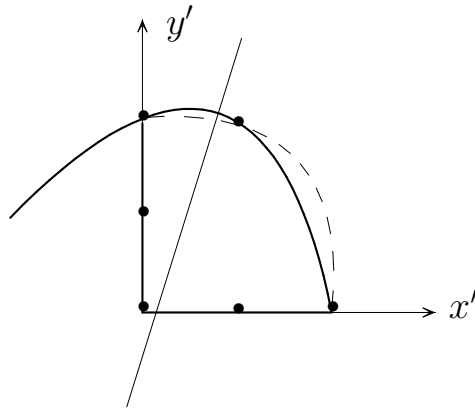


Рис. 9

Поскольку, как уже было сказано, преобразование $(x', y') \rightarrow (x, y)$ линейное, то и на исходной плоскости Oxy образом реперного треугольника \hat{e} будет криволинейный треугольник e с двумя прямолинейными сторонами и одной криволинейной — параболой. Эта парабола определяется путем задания некоторых осей и квадратичной интерполяции по узлам 3, 5 и 2, принадлежащим исходной границе $\partial\Omega$. Заменяем исходный криволинейный треугольник \tilde{e} криволинейным треугольником e . Это приведет к замене криволинейного участка границы $\partial\Omega$ в пределах \tilde{e} куском параболы, интерполирующей исходную кривую по трем узлам. В п. 2 при использовании квадратичных элементов мы пытались интерполировать гладкую границу в пределах элемента линейно, что оказалось не вполне удовлетворительно с точки зрения порядка точности приближенного решения. *Квадратичная интерполяция* границы приводит к более точной аппроксимации области Ω и в то же время снимает возникшие при линейной интерполяции проблемы с оценкой точности квадратичной интерполяции на элементе.

Теперь можно приступить к аппроксимации решения на e . Поскольку есть взаимно однозначное соответствие между e и реперным прямолинейным треугольником \hat{e} , то проще это делать на \hat{e} . Будем представлять приближенное решение в виде квадратичного многочлена на \hat{e} , т.е. будем

считать, что

$$\hat{u}(s, t) = \sum_{j=1}^4 u_j \varphi_j(s, t), \quad (s, t) \in \hat{e}.$$

На e представление приближенного решения $u^h(x, y)$ будет более сложным, да и выписать его не так просто, но нам этого и не нужно, поскольку все вычисления можно (и нужно) проводить на \hat{e} .

Техника, при которой и криволинейная граница конечного элемента и решение на этом элементе аппроксимируются одними и теми же функциями, называется изопараметрической, а сами конечные элементы — изопараметрическими конечными элементами. Отметим, что использованные нами в п. 1 для аппроксимации криволинейной области треугольные конечные элементы с прямолинейными сторонами вместе с кусочно-линейной аппроксимацией решения также являются изопараметрическими. Мы не будем останавливаться на оценке точности квадратичной интерполяции на изопараметрических (шеститочечных) конечных элементах.

Воспользуемся изопараметрическими шеститочечными конечными элементами при решении задачи (16.13). Посмотрим, например, как будет вычисляться матрица жесткости элемента. В отличие от п. 10.2, где матрица жесткости строилась на прямолинейном треугольнике, и все интегралы можно было вычислить точно по формуле (8.17), что привело к формуле (10.4), здесь ситуация более сложная. В исходных переменных треугольник не является прямолинейным, и нужно делать изопараметрическое преобразование переменных, чтобы перейти к реперному треугольнику с прямолинейными сторонами. Это приводит к тому, что подынтегральное выражение сильно усложняется, и появляется реальная необходимость использования квадратурных формул. Итак, от простого интеграла по сложной области мы приходим к сложному интегралу по треугольнику.

Пусть $e^{(i)}$ — изопараметрический треугольник, криволинейная сторона которого представляет собой некую параболу, в которую переходит гипотенуза базисного треугольника при преобразовании (13). Элемент $k_{pq}^{(i)}$

матрицы жесткости $K^{(i)}$ согласно (5.3) вычисляется по формуле

$$k_{pq}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \frac{\partial \varphi_q}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Изучим вопрос о вычислении $\int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy$. Делая преобразование (13), находим, что

$$\int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{\hat{e}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \det[\hat{J}(s, t)] ds dt, \quad (21)$$

где $\hat{J}(s, t)$ — матрица Якоби преобразования (13). Для вычислений по этой формуле нам нужно знать $\partial s / \partial x$ и $\partial t / \partial x$, в то время как соотношения (13) задают преобразование путем простого представления x и y через s и t , которое обращается совсем не просто. Поэтому при вычислении $\partial s / \partial x$ и $\partial t / \partial x$, а также $\partial s / \partial y$ и $\partial t / \partial y$ мы пойдем по другому пути. Имеем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt,$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \hat{J}(s, t) \begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix} = \hat{J}^{-1}(s, t) \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}.$$

С другой стороны,

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy, \quad dt = \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy,$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

и, следовательно, $A = \hat{J}^{-1}(s, t)$. Тем самым, искомые производные, являющиеся элементами матрицы A , находятся из решения системы $\hat{J}(s, t)A = I$. Решая эту систему, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial y / \partial t}{\det[\hat{J}(s, t)]}, & \frac{\partial t}{\partial x} &= -\frac{\partial y / \partial s}{\det[\hat{J}(s, t)]}, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= -\frac{\partial x / \partial t}{\det[\hat{J}(s, t)]}, & \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial x / \partial s}{\det[\hat{J}(s, t)]}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (21)

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy &= \\ &= \int_{\hat{e}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) [\det \hat{J}(s, t)]^{-1} ds dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy &= \\ &= \int_{\hat{e}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(-\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right) [\det \hat{J}(s, t)]^{-1} ds dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Подынтегральные функции в (22), (23) представляют собой дробно-рациональные функции, и для вычисления этих интегралов нужно использовать квадратные формулы.

4. Изопараметрические четырехугольники

Изопараметрическая техника может быть применена и при использовании четырехугольных конечных элементов. В п. 10.3 рассматривались биполиномиальные и другие конечные элементы прямоугольной формы. Там отмечалось, что стороны прямоугольного конечного элемента должны быть параллельны координатным осям. Использование изопараметрической техники позволяет снять это ограничение и даже разрешает конечным элементам не иметь прямоугольную форму.

На рис. 10 изображен четырехугольник с прямолинейными сторонами, а на рис. 11 — квадрат. Отобразим вершины квадрата в соответствующие вершины четырехугольника.

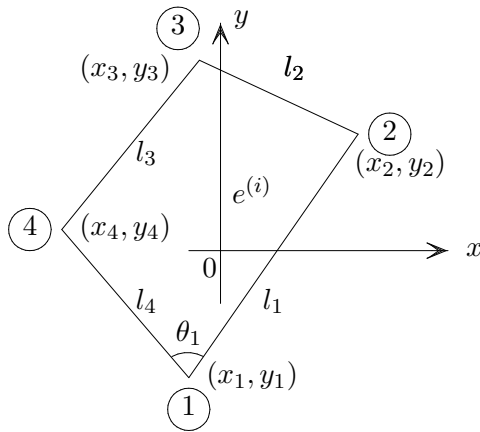


Рис. 10

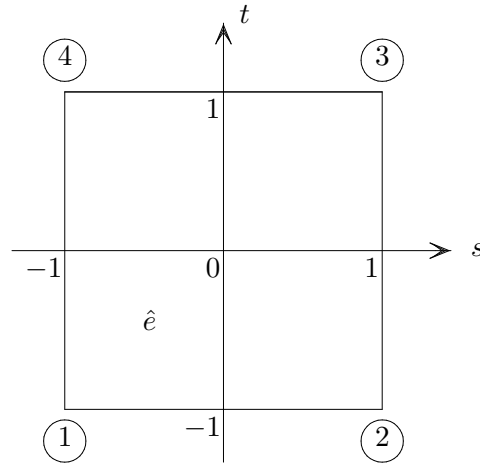


Рис. 11

Очевидно, что такое отображение осуществляет, например, преобразование

$$x = \sum_{j=1}^4 x_j \varphi_j(s, t), \quad y = \sum_{j=1}^4 y_j \varphi_j(s, t), \quad (24)$$

где $\varphi_j(s, t)$ — билинейные функции формы из (10.6). На самом деле, (24) осуществляет не только отображение вершин в вершины, но и всего квадрата \hat{e} в четырехугольник $e^{(i)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что стороны квадрата переходят в стороны четырехугольника, и якобиан преобразования положителен. Посмотрим, например, куда переходит при отображении (24) сторона квадрата, расположенная на прямой $t + 1 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} x(s, -1) &= x_1 \varphi_1(s, -1) + x_2 \varphi_2(s, -1) = \\ &= x_1(1 - s)/2 + x_2(1 + s)/2 = x_1 + (x_2 - x_1)(s + 1)/2. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$y(s, -1) = y_1 + (y_2 - y_1)(s + 1)/2.$$

Исключая s , находим, что

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это — уравнение прямой, проходящей через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , на которой и лежит соответствующая сторона четырехугольника \hat{e} . Итак, граница $\partial\hat{e}$ переходит в границу $\partial e^{(i)}$. Найдем якобиан преобразования (24). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1}{4} [(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)t], \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{4} [(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)s], \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1}{4} [(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)t], \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{4} [(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)s],\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a + bt, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = c + bs, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = A + Bt, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = C + Bs,$$

где a, \dots, C — постоянные. Поэтому

$$\det[\hat{J}(s, t)] = (aC - cA) + (aB - bA)s + (bC - cB)t$$

есть линейная функция. Якобиан $\det[\hat{J}(s, t)]$ не будет обращаться в нуль на \hat{e} , если его значения в вершинах \hat{e} одного знака. Имеем

$$\begin{aligned}\det[\hat{J}(-1, -1)] &= \begin{vmatrix} a - b & c - b \\ A - B & C - B \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} S_{\Delta_{124}} = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \theta_1.\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются значения якобиана в других вершинах \hat{e} . Тем самым, якобиан на \hat{e} будет положительным, если четырехугольник $e^{(i)}$ является выпуклым и невырожденным, т.е. все его углы меньше π .

Итак, четырехугольник $e^{(i)}$, изображенный на рис. 10, может быть использован в качестве конечного элемента, однако приближенное решение на нем будет задаваться в виде билинейной функции не по переменным x, y , а по переменным s, t . В переменных x, y , это будет гладкая, но более сложная функция. Последнее обстоятельство не имеет никакого значения,

поскольку все вычисления при построении матрицы жесткости и вектора нагрузки проводятся в переменных s, t .

Если четырехугольник $e^{(i)}$ расположен в окрестности криволинейной границы, то одна из его сторон будет криволинейной. Заменяем в этом четырехугольнике криволинейную сторону прямолинейной, соединив его вершины, попавшие на границу, отрезком прямой. Рассуждения, аналогичные использованным в п. 1, показывают, что при билинейной аппроксимации решения такая замена не приводит к ухудшению точности приближенного решения в H^1 !

С тем же успехом при кусочно-биквадратичном приближении решения осуществляется биквадратичное отображение \hat{e} на $e^{(i)}$, в котором в серединные узлы прямолинейных сторон $e^{(i)}$ переходят соответствующие серединные узлы \hat{e} . В результате мы получаем четырехугольник с одной криволинейной стороной, которая аппроксимирует границу $\partial\Omega$ лучше, чем прямая.

5. Неоднородная задача Дирихле

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (25)$$

Будем предполагать, что область полигональна, граничная функция $g(x, y)$ непрерывна на $\partial\Omega$, и существует такая функция $v(x, y) \in H^1(\Omega)$, что $v|_{\partial\Omega} = g(x, y)$. Эта функция в дальнейшем не будет участвовать в вычислительном процессе и введена в рассмотрение исключительно из-за того, что здесь мы не имеем иной возможности описать требуемые свойства гладкости $g(x, y)$ на границе. Чтобы поставить отвечающую (25) вариационную задачу, наряду с подпространством $H_0^1(\Omega)$ нам потребуется аффинное многообразие

$$H_E^1(\Omega) := \{v \in H^1 \mid v|_{\partial\Omega} = g(x, y)\}.$$

С учетом введенного обозначения вариационная формулировка задачи (25) будет иметь вид: найти

$$u(x, y) \in H_E^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (26)$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ задаются соотношениями (16.15).

Прежде чем приступить к численному решению этой задачи, заметим, что она не может быть решена при помощи МКЭ галеркинского типа, ибо ни для какого конечноэлементного пространства S^h кусочно-полиномиальных функций включение в $H_E^1(\Omega)$, вообще говоря, невозможно. Исключение составляет лишь тот случай, когда сама функция $g(x, y)$ является кусочно-полиномиальной, но это предположение слишком ограничительно. Для решения задачи (26) мы вынуждены строить МКЭ не галеркинского типа. Как мы уже видели раньше при использовании численного интегрирования и изопараметрической техники, это не приводит к каким-либо серьезным последствиям для качества приближенного решения, но лишает нас возможности при исследовании сходимости пользоваться основной теоремой 11.2.

Пусть π^h — триангуляция Ω , $S^h \subset H^1(\Omega)$ — конечноэлементное пространство, а ω^h — множество всех узлов. Если S^h совпадает с S_1^h из лекции 8, т.е. является пространством непрерывных кусочно-линейных функций, то множество ω^h будет образовано вершинами треугольников из триангуляции π^h . Если S^h образовано кусочно-квадратичными функциями, то при образовании ω^h к вершинам треугольников добавятся середины их сторон. Обозначим через

$$\gamma^h = \omega^h \cap \partial\Omega$$

множество граничных узлов триангуляции π^h , и пусть

$$\overset{\circ}{S}^h := \{v^h \in S^h \mid v^h(x_k, y_k) = 0, \quad (x_k, y_k) \in \gamma^h\}.$$

Очевидно, что $\overset{\circ}{S}^h \subset H_0^1(\Omega)$. Приближенным решением задачи (26) назовем такую функцию

$$u^h \in S^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \overset{\circ}{S}^h, \quad (27)$$

которая удовлетворяет граничному условию

$$u^h(x_k, y_k) = g(x_k, y_k), \quad (x_k, y_k) \in \gamma^h. \quad (28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Постановка задачи (27), (28) аналогична постановке (3.23) в одномерном случае. Но, если в одномерном случае эта постановка была

эквивалентна постановке (3.22), то в рассматриваемом случае пересечение $S^h \cap H_E^1(\Omega)$, вообще говоря, пусто.

Как уже было отмечено, при исследовании сходимости решения задачи (27), (28) мы не можем воспользоваться основной теоремой 11.2, однако оценка

$$\|u^h - u\|_1 \leq c \|i_h u - u\|_1$$

остаётся справедливой. В самом деле, из (26) и (27) следует, что

$$a(u - u^h, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in \overset{\circ}{S}^h,$$

а поскольку $i_h u - u^h \in \overset{\circ}{S}^h$, то и

$$a(u - u^h, i_h u - u^h) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$a(i_h u - u^h, i_h u - u^h) = a(i_h u - u, i_h u - u^h).$$

Поскольку в нашем случае $a(v, v) = |v|_1^2$, то с использованием неравенства Шварца находим, что

$$|i_h u - u^h|_1 \leq c |i_h u - u|_1,$$

а привлекая неравенство Фридрихса, будем иметь

$$\|i_h u - u^h\|_1 \leq c \|i_h u - u\|_1.$$

Наконец, используя неравенство треугольника, отсюда получаем желаемую оценку

$$\|u^h - u\|_1 \leq \|u^h - i_h u\|_1 + \|u - i_h u\|_1 \leq c \|i_h u - u\|_1.$$

Задача оценки точности свелась к задаче оценки интерполяции, которую мы уже рассматривали. Мы не будем более распространяться на эту тему.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Задача отыскания приближенного решения в том случае, когда область имеет криволинейную границу и используется изопараметрическая техника, ставится аналогично (27), (28) с очевидной заменой $a(u^h, v^h)$ и $l(v^h)$ на $a_h(u^h, v^h)$ и $l_h(v^h)$.